

Loesungsskizze Wiederholungstutorium Wahrscheinlichkeiten

Luca Witt

July 30, 2024

Auch wenn ich mir größte Mühe gebe, korrekte Lösungen zu bieten, ist es möglich, dass einige meiner Lösungen Fehler enthalten.

Aufgabe 1: Multiple-Choice

- a) Wir wissen, dass $p = 0.6$, weshalb wir für einen Wurf Erwartungswert 0.6 haben. Jetzt werfen wir allerdings 100 mal, weshalb wir den Erwartungswert $\mathbb{E}[X_1 + X_2 + \dots + X_{100}]$ berechnen müssen. Hier nutzen wir die Linearität des Erwartungswertes und erhalten

$$\sum_{i=1}^{100} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{100} 0.6 = 60.$$

- b) Eine Möglichkeit, die Lösung zu erkennen, liefert eine geometrisch/visuelle Intuition. Die Werte unserer Zufallsvariablen beginnen bei a und hören bei b auf. Da wir eine uniforme Verteilung haben, liegt der Mittelwert tatsächlich "in der Mitte". Bleibt also die Frage, welcher Wert genau in der Mitte von a und b liegt. Das ist genau $\frac{a+b}{2}$.
- c) Ähnlich zur ersten Frage, können wir hier die Summe "rausziehen". Das können wir nur, weil die Zufallsvariablen untereinander unabhängig sind! Die Varianz der einzelnen Variablen ist durch σ^2 gegeben. Somit erhalten wir

$$\text{Var}\left[\sum_{i=1}^{10} X_i\right] = \sum_{i=1}^{10} \text{Var}[X_i] = 40$$

- d) Die geometrische Verteilung liefert die Wahrscheinlichkeit, dass man nach dem k -ten Versuch einen Erfolg hat, solange man vorher Misserfolg hatte. Das ist genau unser Setting: Wir wollen wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit er die Klausur nach dem k -ten Versuch besteht.

Aufgabe 2: Kniffel

Aufgabe 2.1

- a) Wir wollen wissen, wieviele Möglichkeiten es gibt einen Drilling, und einen – vom Drilling verschiedenen – Zwilling zu werfen. Dafür bemerken wir zuerst, dass die Position des Zwilling, das bedeutet welche zwei der fünf Würfel den Zwilling bilden, festgelegt ist, sobald wir wissen, an welchen Positionen der Drilling liegt. Fangen wir also an, zu überlegen, an wievielen Stellen der Drilling stehen

Dafür müssen wir aus den 5 Positionen 3 auswählen. Das entspricht schonmal $\binom{5}{3}$ Möglichkeiten. Damit sind wir allerdings noch nicht fertig, da wir die Augenzahlen noch nicht berücksichtigen. Für unseren Drilling können wir eine der sechs Augenzahlen erhalten. Danach, allerdings, haben wir für den Zwilling nurnoch 5 valide Augenzahlen. Wenn wir das alles multiplizieren, haben wir unsere Lösung.

$$\binom{5}{3} \cdot 6 \cdot 5 = 300$$

- b) Es gibt mehrere Möglichkeiten, das zu berechnen. Eine, meiner Meinung nach sehr abstrakte Art, ist hier gegeben: [https://brefeld.hier-im-netz.de/stochastik-formeln.html#:~:text=Beispiel%2015%20\(Wahrscheinlichkeit%20f%C3%BCr%20gro%C3%9Fe%20und%20kleine%20Stra%C3%9Fe%20beim%20Kniffel\)](https://brefeld.hier-im-netz.de/stochastik-formeln.html#:~:text=Beispiel%2015%20(Wahrscheinlichkeit%20f%C3%BCr%20gro%C3%9Fe%20und%20kleine%20Stra%C3%9Fe%20beim%20Kniffel).). Mein Ansatz ist ein wenig stumpfer, aber hoffentlich leichter verständlich – und weniger fehleranfällig.

Wir wollen die kleinen Straßen zählen. Bevor wir das tun, überlegen wir einmal, welche Menge an Augenzahlen in einem Wurf O.K. ist. Ich liste diese einmal ohne genaue Sortierung auf.

{1, 2, 3, 4, 6}	(1)
{1, 1, 2, 3, 4}	(2)
{1, 2, 2, 3, 4}	(3)
{1, 2, 3, 3, 4}	(4)
{1, 2, 3, 4, 4}	(5)
{2, 2, 3, 4, 5}	(6)
{2, 3, 3, 4, 5}	(7)
{2, 3, 4, 4, 5}	(8)
{2, 3, 4, 5, 5}	(9)
{3, 3, 4, 5, 6}	(10)
{3, 4, 4, 5, 6}	(11)
{3, 4, 5, 5, 6}	(12)
{3, 4, 5, 6, 6}	(13)
{1, 3, 4, 5, 6}	(14)

Das sind 14 mögliche Mengen an Augenzahlen. Wichtig ist, dass wir noch nicht über mögliche Kombinationen gesprochen haben, sondern lediglich welche Augenzahlen vorkommen. Das ist allerdings leicht. Wir können die 5 Elemente jeweils beliebig permutieren – das gibt $5!$ viele Permutationen. Allerdings interessieren wir uns nicht dafür, wie wir die zwei identischen Augenzahlen permutieren, weshalb wir nochmal durch $2!$ teilen müssen. Das ist bereits unsere Lösung. Wir haben 2 Fälle, in denen wir einfach permutieren können, und 12 Fälle, in denen wir die doppelt vorkommenden Augen beachten müssen.

$$12 \cdot \frac{5!}{2!} + 2 \cdot 5! = 12 \cdot 60 + 2 \cdot 120 = 960$$

- c) Bei einer großen Straße haben wir es leichter. Es gibt lediglich zwei mögliche Mengen an Augenzahlen, mit der wir eine große Straße erzielen – das sind $1 - 2 - 3 - 4 - 5$ oder $2 - 3 - 4 - 5 - 6$. Bei jeder können wir beliebig permutieren. Deshalb haben wir $2 \cdot 5! = 240$ Möglichkeiten.
- d) Hier haben wir 6 Möglichkeiten, da wir für jede Augenzahl ausschließlich eine Art haben ein Kniffel zu werfen.

Aufgabe 2.2

Hier muss man die Anzahl der Konfigurationen, die man in der vorherigen Aufgabe berechnet hat, einfach durch die Anzahl der insgesamt möglichen Konfigurationen teilen. Insgesamt werfen wir 5 Würfel mit 6 Augenzahlen, weshalb wir 6^5 viele Möglichkeiten haben.

Aufgabe 2.3

- a) Hier müssen wir lediglich angeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit Jan wieviele Punkte erzielt. Dafür nehmen wir die zuvor berechneten Wahrscheinlichkeiten und geben ihnen die zugehörige Punktzahl.
- b) Schmeißen wir die Formel für den Erwartungswert auf die zuvor erhaltene Zufallsvariable, so erhalten wir:

$$\frac{300}{6^5} \cdot 25 + \frac{960}{6^5} \cdot 30 + \frac{240}{6^5} \cdot 40 + \frac{6}{6^5} \cdot 50 \approx 5.941$$

- c) Wir wissen, dass ein Wurf, in Erwartung, 5.941 generiert. Die Frage ist nun, für welches k gilt: $k \cdot 5.941 = 100$. Das liefert $k \approx 16.8311$, wobei wir k aufrunden, da wir keine halben Würfe tätigen können. Er braucht also im Schnitt 17 Würfe.
- d) Aus der Vorlesung kennt ihr die Formel $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$. Für den ersten Term müssen wir lediglich unser Ergebniss aus Aufgabenteil 2 quadrieren. Den zweiten Term müssen wir berechnen.

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{300}{6^5} \cdot 25^2 + \frac{960}{6^5} \cdot 30^2 + \frac{240}{6^5} \cdot 40^2 + \frac{6}{6^5} \cdot 50^2 \approx 186.5355$$

Somit erhalten wir $\mathbb{V}[X] = 186.5355 - 5.941^2 \approx 151.2400$.

Aufgabe 3: Glücksspielbetrug

Aufgabe 3.1

- a) Wir haben $X \sim \text{Bernoulli}(0.6)$ und

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{mit WSK } 0.6 \\ -1, & \text{mit WSK } 0.4 \end{cases}$$

- b) Wir erhalten $1 \cdot 0.6 + 0 \cdot 0.4 = 0.6$. Er sieht also $\$0.6$ -mal Kopf, pro Runde.
- c) $1 \cdot 0.6 - 1 \cdot 0.4 = 0.2$. Jan gewinnt also, im Schnitt, 20 Cent.
- d) Hier wiederholt Jan den Münzwurf 50 mal. Für den Gewinn berechnen wir somit $50 \cdot \mathbb{E}[Y] = 50 \cdot 0.2 = 10$. Er gewinnt also, nach 50 Runden, 10 Euro.

Aufgabe 3.2

- a) Wir wissen, wieviel Jan erhält/zahlt, je nach dem was er wirft. Stellen wir die Formel für den Erwartungswert einmal mit unbekanntem Wahrscheinlichkeiten p_k, p_z , für Kopf bzw. Zahl, auf.

$$\mathbb{E}[Y] = p_k \cdot 1 - p_z \cdot 1 \stackrel{!}{=} 1$$

Diese Gleichung kann nur stimmen, wenn $p_z = 0$. Im Umkehrschluss bedeutet das, $p_k = 1$. Er muss also eine komplett gezinkte Münze haben, die immer Kopf zeigt.

- b) Die Aufgabenstellung ist bewusst frei formuliert. Allgemein kann er das Spiel, wie wir gesehen haben, einfach wiederholen. Es gibt aber noch eine andere Möglichkeit, seinen Gewinn in einer Runde zu erhöhen. Dafür ändern wir einfach den Gewinn/Verlust. Nehmen wir dafür einmal an, er würde nun 5 Euro erhalten, bzw. zahlen. Somit ergibt sich $\mathbb{E}[Y] = 0.6 \cdot 5 - 0.4 \cdot 5 = 3 - 2 = 1$, wie gewünscht.

Aufgabe 4: Strafgeelder umgehen

- a) Hier suchen wir lediglich nach der Wahrscheinlichkeit, dass er **nicht** gegen eine Polizistin spielt. Diese ist durch $1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$ gegeben.
- b) Hier müssen wir zwei Fälle unterscheiden, da Jan von einem Bürger oder von einer Polizistin erwischt werden kann.

$$\Pr[\text{Erwischt} \mid \text{Buerger}] \cdot \Pr[\text{Buerger}] = \frac{9}{1000} \quad \Pr[\text{Erwischt} \mid \text{Polizistin}] \cdot \Pr[\text{Polizistin}] = \frac{1}{50}$$

Diese Wahrscheinlichkeiten addieren wir nun auf, um unsere Gesamtwahrscheinlichkeit, von $\frac{29}{1000}$, zu erhalten.

- c) Hier wenden wir den Satz von Bayes an:

$$\Pr[\text{Buerger} \mid \text{Erwischt}] = \frac{\Pr[\text{Erwischt} \mid \text{Buerger}] \cdot \Pr[\text{Buerger}]}{\Pr[\text{Erwischt}]} = \frac{\frac{1}{100} \cdot \frac{9}{10}}{\frac{29}{1000}}$$

- d) Wir wissen nun, dass er mit Wahrscheinlichkeit $\frac{29}{1000}$ erwischt wird, was im Umkehrschluss bedeutet, dass er mit Wahrscheinlichkeit $\frac{971}{1000}$ **nicht** erwischt wird. Vereinfachend gehen wir davon aus, dass die Spiele untereinander unabhängig sind. Dann sind wir an der Wahrscheinlichkeit interessiert, dass er irgendwann zwischen dem ersten und fünfzehnten Spiel erwischt wird. Anders ausgedrückte sind wir an der Gegenwahrscheinlichkeit interessiert, dass er nach 15 immernoch nicht erwischt wurde. Das liefert folgende Wahrscheinlichkeit.

$$1 - \left(\frac{971}{1000}\right)^{15} \approx 0.1368$$

Die Chance liegt also bei ca. 13.5%.

- e) Diesmal kennen wir die Anzahl der Runden nicht im vorhinein, weshalb wir eine Gleichung aufstellen und für n lösen.

$$1 - \left(\frac{971}{1000}\right)^n = 0.9 \tag{15}$$

$$0.1 = \left(\frac{971}{1000}\right)^n \tag{16}$$

$$\log_{\frac{971}{1000}}(0.1) = n \tag{17}$$

Wolframalpha gibt uns nun den Wert für $n \approx 78.2425$. Somit wird Jan nach 79 Spielen mit hoher Wahrscheinlichkeit erwischt.