Wiederholungstutorium Wahrscheinlichkeiten

Luca Witt

25. Juli 2024

Diese Übungen sind im Kontext des Tutoriums erstellt. Insbesonders sind sie nicht von dem Lehrstuhl erstellt, der das Modul gelehrt hat. Es handelt sich hierbei um ein Angebot von Studis für Studis.

Aufgabe 1: Multiple-Choice

Entscheide bei den folgenden Fragen, welche der Antworten korrekt ist. Begründe deine Antwort!

a) Du wirfst eine gezinkte Münze 100 mal, wobei die Wahrscheinlichkeit für Kopf $p = 0.6$ ist. Wie oft siehst Du im Schnitt Kopf?

○ 40 ○ 50 ○ 60 ○ 70

b) Sei X eine kontinuierliche, uniformverteilte Zufallsvariable über dem Intervall $[a, b]$. Welchen Erwartungswert hat die Zufallsvariable?

○ a ○ $b - a$ ○ $\frac{b+a}{2}$ ○ b

c) Es seien $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ i.i.d. unabhängige Zufallsvariablen, mit $\mu = 2$ und $\sigma^2 = 4$. Welchen Wert hat $\text{Var}[X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}]$?

○ 4 ○ 20 ○ 40 ○ 100

d) Angenommen, Jan hat eine Wahrscheinlichkeit von 0.2 die Klausur zu bestehen. Wir interessieren uns nun dafür, wie oft er die Klausur schreibt, bis er besteht. Welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung entspricht das?

○ Bernoulli(0.2) ○ Binomial(n, 0.2) ○ Normal(0, 0.2) ○ Geom(0.2)

Aufgabe 2: Kniffel

Jan ist ein begeisterter Kniffel Fan. Jetzt, wo er die Vorlesung "Wahrscheinlichkeit für Informatik" gehört hat, möchte er sich die Wahrscheinlichkeiten für sein Lieblingsspiel genauer anschauen. Hier einmal der grobe Spielablauf:

Jeder Spieler hat pro Runde drei Würfe, um eine möglichst gute Kombination zu erzielen. Nach jedem Wurf kann der Spieler entscheiden, welche Würfel er behalten und welche er erneut werfen möchte. Nach dem dritten Wurf oder wenn der Spieler früher zufrieden ist, trägt er das Ergebnis in eine der freien Kategorien auf seinem Spielblock ein. Die für uns wichtigen Kategorien sind:

Name	Konditionen	Punktzahl
Full House	Ein Drilling und ein Paar	25
Kleine Straße	Vier aufeinanderfolgende Augenzahlen	30
Große Straße	Fünf aufeinanderfolgende Augenzahlen	40
Kniffel	Fünf gleiche Augenzahlen	50

Wir nehmen an, dass die Würfe unabhängig voneinander geschehen.

Aufgabe 2.1

Für die folgenden Ereignisse, berechne wieviele Konfigurationen es gibt, um diese zu erzielen. Anders formuliert, gib an auf wieviele Arten man diese würfeln kann.

a) Jan hat beim ersten Wurf ein Full House.

b) Jan hat beim ersten Wurf eine Kleine Straße.

c) Jan hat beim ersten Wurf eine Große Straße.

d) Jan hat beim ersten Wurf ein Kniffel.

Aufgabe 2.2

Nutze deine Ergebnisse aus der vorherigen Aufgabe um nun die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten zu berechnen.

Aufgabe 2.3

Nun wollen wir schauen, wieviele Punkte Jan – in einem vereinfachten Setting – wirft. Wieder würfelt er einmal, uns interessieren diesmal die Punkte die er erhält. Für die vier Möglichkeiten, die uns interessieren, sind die Punkte in der obigen Tabelle gegeben.

a) Gib die Verteilung der Zufallsvariable X an.

b) Berechne $\mathbb{E}(X)$. / Wieviele Punkte erzielt Jan im Schnitt?

c) Wie häufig muss er würfeln, um im Schnitt 100 Punkte zu erhalten?

d) Berechne $\mathbb{V}(X)$. / Wie sehr unterscheiden sich die Punkte, die er erzielt, durchschnittlich von Wurf zu Wurf?

Aufgabe 3: Glücksspielbetrug

Jans Kniffelaffinität hat einen hohen Preis: Er ist stark verschuldet und hat eine Hypothek auf seinem Familienhaus. Nun beschließt er, sich aus dem Schlamassel zu retten, indem er Glücksspielbetrug begeht! Dafür möchte er seinen vermögenden Onkel, mit einer gezinkten Münze, um Geld erleichtern.

Dafür sei die Münze gezinkt, sprich die Wahrscheinlichkeit für Kopf ist $p = 0.6$.

Aufgabe 3.1

Jan spielt nun mit seinem Onkel 50 Runden. Wenn er Kopf wirft, erhält er einen Euro von seinem Onkel, sonst muss er ihm einen Euro zahlen.

Sei dafür X die Zufallsvariable, welche zeigt, ob Kopf oder Zahl geworfen wurde. Und sei Y die Zufallsvariable, welche den Gewinn/Verlust, pro Wurf, modelliert.

a) Gib die Verteilung der beiden Zufallsvariablen X und Y an.

b) Berechne $\mathbb{E}(X)$. / Wie häufig wirft Jan im Schnitt Kopf?

c) Berechne $\mathbb{E}(Y)$. / Wie viel Geld verdient/verliert er im Schnitt?

d) Wieviel Geld verdient/verliert Jan nach 50 Runden?

Aufgabe 3.2

Mit dem zuvor berechneten Profit ist Jan nicht zufrieden, er möchte diesen erhöhen. Dafür möchte er die Münze weiter zinken, sprich die Wahrscheinlichkeit für Kopf verändern.

a) Berechne p, sodass $\mathbb{E}(Y) = 1$. / Berechne welche Wahrscheinlichkeit p, für Kopf, die Münze haben muss, damit er im Schnitt einen Euro pro Runde verdient.

b) Wie kann er noch $\mathbb{E}(Y) = 1$ erzielen, ohne p zu ändern? / Was kann Jan tun, wenn er die Münze nicht ändern kann? Wie kann er seinen Gewinn dennoch auf einen Euro im Schnitt erhöhen?

Aufgabe 4: Strafgelder umgehen

Nachdem Jan einige Zeit seinen Onkel über den Tisch gezogen hat, möchte dieser nicht mehr mit ihm spielen. Deshalb beschließt er, sein Spiel mit Fremden weiterzuführen. Jetzt gibt es allerdings zusätzlich eine kleine Chance, von der Polizei erwischt zu werden. Jede Runde spielt Jan entweder mit einer Polizistin oder mit einem normalen Bürger.

Falls er gegen die Polizistin spielt, so erwischt diese ihn beim Betrug mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$. Außerdem spielt er mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$ gegen eine Polizistin. Normale Bürger können ihn auch beim Betrug erwischen, allerdings nur mit einer Chance von $\frac{1}{100}$.

a) Berechne Pr(Bürger). / Mit welcher Wahrscheinlichkeit spielt Jan gegen einen Bürger?

b) Berechne Pr(Erwischt). / Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird Jan bei einem Spiel erwischt?

c) Berechne Pr(Bürger|Erwischt). / Angenommen Jan wurde erwischt, mit welcher Wahrscheinlichkeit spielte er gegen einen Bürger?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird Jan nach 15 Spielen erwischt?

e) Nach wievielen Spielen wurde er mit 90% Wahrscheinlichkeit erwischt?